「素粒子物理学の進展」at YITP　31 July, 2006.

荷電レプトンの質量公式と
ニュートリノの質量と混合

小出義夫（静岡県立大学）

Brannen:「観測されるニュートリノの質量も荷電レプトンの質量公式と同じ形の式を満たす」

このことをマジに受け取ると，ニュートリノの質量と混合（従って，ニュートリノの湯川結合の構造）はどうあるべきか？

また，クォークの質量と混合は？

Based on hep-ph/0509212(YK, PRD73 (2006) 057901) and hep-ph/0605074.

1 Introduction

1.1 Motivation

古い話

荷電レプトン質量公式

$$m_e + m_\mu + m_\tau = \frac{2}{3}(\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})^2 \quad (1.1)$$

は，観測値を入力すると，ともかくよくよく合う

Y. Koide, MPL A5, 2319 (1990)

Y K, LNC 34, 201 (1982); PRD 28, 252 (1983)

$$m_\tau = \left[2(\sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_e}) + \sqrt{3}\sqrt{m_\mu + m_e + 4\sqrt{m_e m_\mu}}\right]^2$$

$$= 1776.97 \text{ MeV} \quad (1.2)$$

$$m_\tau^{exp} = 1776.99^{+0.29}_{-0.26} \text{ MeV} \quad (1.3)$$

新しい話：　Brannenの指摘

ニュートリノもまた同様な質量公式を満たす！

$$m_{\nu 1}+m_{\nu 2}+m_{\nu 3}=\frac{2}{3}(-\sqrt{m_{\nu 1}}+\sqrt{m_{\nu 2}}+\sqrt{m_{\nu 3}})^2 \quad (1.4)$$

C.Brannen (http://brannenworks.com/MASSWS2.pdf, 2006)

もちろん，現在の観測値 Δm^2_{atm} および Δm^2_{solar} だけからはそのような主張はできない．あくまでその可能性の指摘．
クォークでは明らかにその可能性は否定されるが，ニュートリノではその可能性は除外できず，検討する価値は十分にある．
しかも，ニュートリノが公式(1.4)を満たすとするなら，
従来のモデルは大きく変更されねばならない．

1.2 Universal Seesaw Model

●公式(1.1)は $\sqrt{m_i}$ の形で記述

⇒ シーソー型質量行列模型

$$(M_e)_{ij} = v_i \frac{\delta_{ij}}{M_E} v_j \tag{1.5}$$

ここで, 3つのscalarsを考え, $v_i \equiv \langle \phi_i \rangle$ は

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \frac{2}{3}(v_1 + v_2 + v_3)^2 \tag{1.6}$$

を満たすとする

Universal Seesaw Model

Berezhiani (1983), Chang-Mohapatra (1985), ・・・

$$M_f = m_L M_F^{-1} m_R^T \qquad (1.7)$$

where

$$m_L = \frac{1}{\kappa} m_R = y_e \mathrm{diag}(v_1, v_2, v_3) \qquad (1.8)$$

$SU(2)_L$ がよく成立していることの説明にも都合がよい

M_F: flavor-dependent

CKM mixing, MNS mixing はM_Fの違いに起因する

- M_e では, (1.1) を満たすように,
  M_E は unit matrix の構造を持つと仮定
- MNS mixing が存在する以上, M_Rは unit matrix 構造を持つことはあり得ない
- 従って, M_ν の固有値は (1.1) [or (1.4)]を満たすことはあり得ない.

Brannenの指摘をマジに受け取るなら

モデルの変更

$$M_f = m_{fL} M_F^{-1} m_{fR}^T \tag{1.9}$$

2 準備: z_i parameters

- パラメター z_i を次の式を満たす量として定義

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \frac{2}{3}(z_1 + z_2 + z_3)^2 \tag{2.1}$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1 \tag{2.2}$$

- 具体的には次の式から値を決める

$$\frac{z_1}{\sqrt{m_e}} = \frac{z_2}{\sqrt{m_\mu}} = \frac{z_3}{\sqrt{m_\tau}} = \frac{1}{\sqrt{m_e + m_\mu + m_\tau}}, \tag{2.3}$$

$$z_1 = 0.016473,\ z_2 = 0.236869,\ z_3 = 0.971402 \tag{2.4}$$

z_i の別の表示

- 一般に Herimitian matrix M の固有値は

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \tfrac{1}{3}a - \tfrac{1}{3}b\,\mathrm{sin}\,\theta, \\ \lambda_2 &= \tfrac{1}{3}a - \tfrac{1}{3}b\,\mathrm{sin}\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right), \\ \lambda_3 &= \tfrac{1}{3}a - \tfrac{1}{3}b\,\mathrm{sin}\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right), \end{aligned} \qquad (2.5)$$

と表現できる. ここで

$$a = \mathrm{Tr}M, \quad b = \sqrt{2}\sqrt{3\mathrm{Tr}(M^2) - (\mathrm{Tr}M)^2}. \qquad (2.6)$$

即ち，固有値が(1.6)[or (2.1)]を満たすためには

$$b = \sqrt{2}a \qquad (2.7)$$

であればよい

θ_f の定義

$$z_{f1} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\theta_f,$$
$$z_{f2} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta_f + \frac{2}{3}\pi\right),$$
$$z_{f3} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta_f + \frac{4}{3}\pi\right), \tag{2.8}$$

- m_{ei} の実験値から

$$\theta_e = \frac{\pi}{4} - \varepsilon = 42.7324^\circ \quad (\varepsilon = 2.2676^\circ), \tag{2.9}$$

Brannenの予測

- **Brannen**(2006)は次のように主張した

$$\theta_\nu = \theta_e + \frac{\pi}{12} = 57.7324^\circ, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} z_{\nu 1} &= -0.079938, \\ z_{\nu 2} &= 0.385404, \\ z_{\nu 3} &= 0.919279. \end{aligned} \quad (2.11)$$

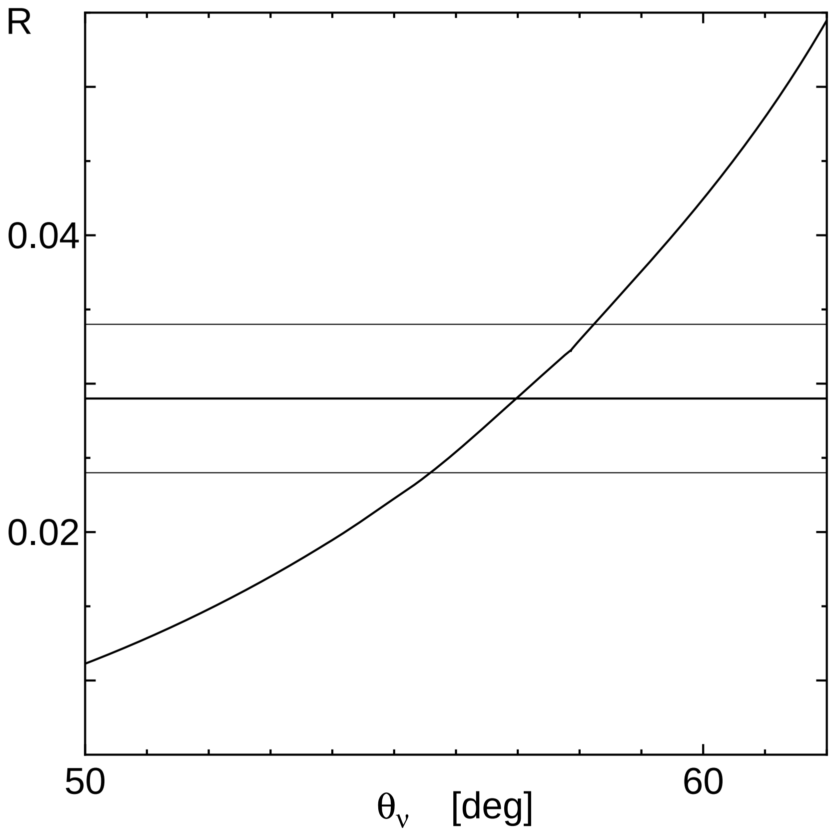
- **この仮定は**

$$R \equiv \frac{|m_{\nu 2}^2 - m_{\nu 1}^2|}{|m_{\nu 3}^2 - m_{\nu 2}^2|} = \frac{z_{\nu 2}^4 - z_{\nu 1}^4}{z_{\nu 3}^4 - z_{\nu 2}^4} = 0.0318, \quad \mathbf{(2.12)}$$

を予言する

$$R = \frac{\Delta m_{solar}^2}{\Delta m_{atm}^2} = \frac{(7.9^{+0.6}_{-0.5}) \times 10^{-5}}{(2.72^{+0.38}_{-0.25}) \times 10^{-3}} = (2.9 \pm 0.5) \times 10^{-2}. \quad \mathbf{(2.13)}$$

θ_νとRの関係



R versus θ_ν under the relation (1.4). The horizontal lines denote the observed values $R = (2.9 \pm 0.5) \times 10^{-2}$

3 S_3 によるニュートリノの記述

- 観測されるMNS混合は tribimaximal mixing に近い値を示している

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

S_3の規約表現を次のように定義

Singlet of S_3

$$\phi_\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}(\phi_3 + \phi_2 + \phi_1) \tag{3.2}$$

Doublet of S_3

$$\begin{aligned} \phi_\pi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 - \phi_2) \\ \phi_\eta &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3) \end{aligned} \tag{3.3}$$

ただし, (2.3)の定義に従って, (e_1,e_2,e_3) は (e,μ,τ) を意味する

- (2.1)式

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \frac{2}{3}(z_1 + z_2 + z_3)^2$$

の要求は

$$z_\pi^2 + z_\eta^2 = z_\sigma^2 \qquad (3.4)$$

を意味する

- この定義ではニュートリノ状態は

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\eta \\ \nu_\sigma \\ \nu_\pi \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

と記述される

それ故, neutrino Dirac mass matrix M_ν^D を $(\nu_\eta, \nu_\sigma, \nu_\pi)$ を基底として書き下すことが便利

4 S_3 invariant model

Charged lepton sector

$$H_e = y_e \left(\bar{\ell}_{L1} E_{R1} \phi^d_{L1} + \bar{\ell}_{L2} E_{R2} \phi^d_{L2} + \bar{\ell}_{L3} E_{R3} \phi^d_{L3} \right) \tag{4.1}$$

Neutrino sector

$$H_\nu = y_\nu \frac{\bar{\ell}_\pi N_\pi + \bar{\ell}_\eta N_\eta + \bar{\ell}_\sigma N_\sigma}{\sqrt{3}} \phi^u_\sigma$$

$$+ y_\nu \left[\frac{\bar{\ell}_\pi N_\eta + \bar{\ell}_\eta N_\pi}{\sqrt{2}} \phi^u_\pi + \frac{\bar{\ell}_\pi N_\pi - \bar{\ell}_\eta N_\eta}{\sqrt{2}} \phi^u_\eta \right] . \tag{4.2}$$

$$M_\nu^D = m_0^\nu \begin{pmatrix} \frac{z_\sigma^u}{\sqrt{3}} - \frac{z_\eta^u}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{z_\pi^u}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{z_\sigma^u}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{z_\pi^u}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{z_\sigma^u}{\sqrt{3}} + \frac{z_\eta^u}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

where $\langle \phi_\pi^u \rangle = v_u z_\pi^u$ and so on.

$$\begin{aligned} (m_\eta^\nu)' &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} z_\sigma^u - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(z_\pi^u)^2 + (z_\eta^u)^2} \right) m_0^\nu, \\ m_\sigma^\nu &= \frac{1}{\sqrt{3}} z_\sigma^u m_0^\nu, \\ (m_\pi^\nu)' &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} z_\sigma^u + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(z_\pi^u)^2 + (z_\eta^u)^2} \right) m_0^\nu. \end{aligned} \tag{4.4}$$

- (2.1)は

$$(z_\pi^u)^2 + (z_\eta^u)^2 = (z_\sigma^u)^2 = \frac{1}{2}, \tag{4.5}$$

を意味するので, z_π^u / z_η^u の値に無関係に

$$\begin{aligned} (m_\eta^\nu)' &= (\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2}) m_0^\nu, \\ m_\sigma^\nu &= \frac{1}{\sqrt{6}} m_0^\nu, \\ (m_\pi^\nu)' &= (\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2}) m_0^\nu, \end{aligned} \tag{4.6}$$

を得る. この結果は, (2.8)と比較すると,

$$\theta_\nu = \frac{\pi}{3} \quad (i.e. \quad \theta_\nu = 60^\circ), \tag{4.7}$$

$$R = \frac{{m_{\nu 2}}^2 - {m_{\nu 1}}^2}{{m_{\nu 3}}^2 - {m_{\nu 2}}^2} = \frac{4\sqrt{6} - 9}{4\sqrt{6} + 9} = 0.04245. \tag{4.8}$$

を与える. Brannenの予測値は出せないが, 悪くもない.

5 Explicitly broken S_3 model

- S_3 invariance を放棄して，ともかく，現象論的によい値を与えるBrannenの関係を与えるにはどのような相互作用が要求されるかを見る

$$H_\nu = y_\nu \frac{\bar{\ell}_\pi N_\pi + \bar{\ell}_\eta N_\eta + \bar{\ell}_\sigma N_\sigma}{\sqrt{3}} \phi_\sigma$$

$$+ y_\nu \frac{\bar{\ell}_\pi N_\pi - \bar{\ell}_\eta N_\eta}{\sqrt{2}} \phi_x$$

$$+ y_\nu \frac{\bar{\ell}_\pi N_\pi + \bar{\ell}_\eta N_\eta - 2\bar{\ell}_\sigma N_\sigma}{\sqrt{6}} \phi_y. \qquad (5.1)$$

- ϕ_x and ϕ_y は ϕ_σ に直交

 すなわち, linear combinations of ϕ_π and ϕ_η

- $\nu_\pi \leftrightarrow \nu_\eta \ (\phi_\pi \leftrightarrow \phi_\eta)$対称

すなわち,

$$\phi_x = \frac{\phi_\pi - \phi_\eta}{\sqrt{2}}, \quad \phi_y = \frac{\phi_\pi + \phi_\eta}{\sqrt{2}}. \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} H_\nu = y_\nu \bar{\ell}_\pi N_\pi & \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\phi_\sigma - \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\phi_\pi + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\phi_\eta\right)\right] \\ + y_\nu \bar{\ell}_\eta N_\eta & \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\phi_\sigma - \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\phi_\pi - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\phi_\eta\right)\right] \\ + y_\nu \bar{\ell}_\sigma N_\sigma & \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\phi_\sigma - \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_\pi + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_\eta\right)\right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

- (5.2) から得られるM_ν^D は $(\nu_\eta, \nu_\sigma, \nu_\pi)$ basis で対角型になっている
- (4.5) より

$$\begin{aligned}\langle\phi_\pi\rangle &= vz_\pi = \frac{v}{\sqrt{2}}\cos\theta_e,\\ \langle\phi_\eta\rangle &= vz_\eta = -\frac{v}{\sqrt{2}}\sin\theta_e,\\ \langle\phi_\sigma\rangle &= vz_\sigma = \frac{v}{\sqrt{2}},\end{aligned} \tag{5.4}$$

とおけるので,

$$M_\nu^D = \mathrm{diag}(m_{\eta\eta}, m_{\sigma\sigma}, m_{\pi\pi}), \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}m_{\eta\eta} &= y_\nu v\left[\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\theta_e + \frac{\pi}{12}\right)\right],\\ m_{\sigma\sigma} &= y_\nu v\left[\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\theta_e - \frac{\pi}{4}\right)\right],\\ m_{\pi\pi} &= y_\nu v\left[\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\theta_e - \frac{\pi}{12}\right)\right],\end{aligned} \tag{5.6}$$

を得る.これは Brannen が予測した関係を与える.

- このケースでは S_3 invariance は放棄.
  (5.2) の意味は今後の問題.

しかし, 望みの tribimaximal mixing とneutrino mass values が得られたことは注目すべき.

$$
\begin{aligned}
m_{\nu 1} &= 0.00039\,\mathrm{eV}, \\
m_{\nu 2} &= 0.0092\,\mathrm{eV}, \\
m_{\nu 3} &= 0.052\,\mathrm{eV},
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

$$
\tan^2\theta_{12} = \frac{1}{2} \qquad (\theta_{12} = 35.26^\circ), \tag{5.8}
$$

$$
\sin^2 2\theta_{23} = 1, \qquad |U_{13}| = 0 \tag{5.9}
$$

6 クォークではどうか？

- 次のR_f を定義して，値を見る

$$R_f(\eta_1, \eta_2) = \frac{\frac{2}{3}\left(\eta_1\sqrt{m_{f1}} + \eta_2\sqrt{m_{f2}} + \sqrt{m_{f3}}\right)^2}{m_{f1} + m_{f2} + m_{f3}} \tag{6.1}$$

Sector	$R(+,+)$	$R(-,+)$	$R(+,-)$	$R(-,-)$
Charged lepton	0.999998	0.946922	0.376006	0.34374
Neutrino	1.28	1.00	0.251	0.137
Up-quark	0.753	0.743	0.590	0.581
Down-quark	0.955	0.834	0.481	0.397

- R_f =1 と選べるのはレプトンのみ
- **クォークではR_f =1となることを棄てても，**
  R_u=R_d ですら成立しない

- クォークではやはり unit matrix型でないM_Fを考えざるを得ない

- 経験公式

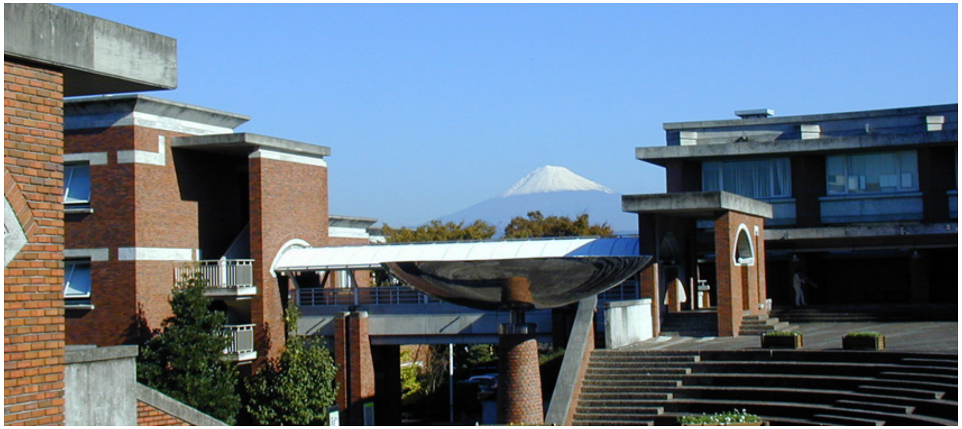
$$\tan\theta_c = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{m_\mu} - \sqrt{m_e})}{2\sqrt{m_\tau} - \sqrt{m_\mu} - \sqrt{m_e}} \qquad (6.2)$$

Y.K., PRL 47, 1241 (1981)

は何かのヒントとなり得るか？

探究はまだまだ続く･･･

お知らせ



International Workshop on

Neutrino Masses and Mixings

--- Toward Unified Understanding of Quark and Lepton Mass Matrices ---

University of Shizuoka, December 17-19, 2006

で，ぜひお会いしましょう！

詳しくは
http://phys.u-shizuoka-ken.ac.jp

Appendix Higgs potential and an S_3 symmetry

hep-ph/0509212(YK, PRD73 (2006) 057901)

A.1 S_3 symmetric Higgs potential

U(3): YK, MPL (1990); YK & Tanimoto, ZP C72 (1993) ;

S_3: YK, PRD 60, 077301 (1999)

We assume an S_3 invariant Higgs potential

$$V = \mu^2 \sum_i (\overline{\phi}_i \phi_i) + \frac{1}{2}\lambda_1 \left[\sum_i (\overline{\phi}_i \phi_i) \right]^2$$

$$+\lambda_2 (\overline{\phi}_\sigma \phi_\sigma)(\overline{\phi}_\pi \phi_\pi + \overline{\phi}_\eta \phi_\eta), \quad \text{(A.1)}$$

where

Singlet of S_3

$$\phi_\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \quad \text{(A.2)}$$

Doublet of S_3

$$\phi_\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - \phi_2)$$
$$\phi_\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(\phi_1 + \phi_2 - 2\phi_3) \quad \text{(A.3)}$$

V についての極小条件

$$\mu^2 + \lambda_1 \sum_i |v_i|^2 + \lambda_2(|v_\pi|^2 + |v_\eta|^2) = 0 \qquad \text{(A.4)}$$

$$\mu^2 + \lambda_1 \sum_i |v_i|^2 + \lambda_2 |v_\sigma|^2 = 0 \qquad \text{(A.5)}$$

$$|v_\sigma|^2 = |v_\pi|^2 + |v_\eta|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda_1 + \lambda_2} \qquad \text{(A.6)}$$

従って

$$|v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 = |v_\pi|^2 + |v_\eta|^2 + |v_\sigma|^2$$

$$= 2|v_\sigma|^2 = 2\left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{\sqrt{3}}\right)^2 \qquad \text{(A.7)}$$

Potential (A.1) は S_3 invariant な一般形ではない

一般に S_3 invariant な fieldsの４乗項は5項

（ただし，**SU(2)L** を無視してのカウント）

$$
\begin{aligned}
V = &\mu^2(\overline{\phi}_\pi\phi_\pi + \overline{\phi}_\eta\phi_\eta + \overline{\phi}_\sigma\phi_\sigma) \\
&+\frac{1}{2}\lambda_\sigma(\overline{\phi}_\sigma\phi_\sigma)^2 + \frac{1}{2}\lambda_+(\overline{\phi}_\pi\phi_\pi + \overline{\phi}_\eta\phi_\eta)^2 \\
&+\frac{1}{2}\lambda_-(\overline{\phi}_\pi\phi_\eta - \overline{\phi}_\eta\phi_\pi)^2 \\
&+\lambda_2(\overline{\phi}_\sigma\phi_\sigma)(\overline{\phi}_\pi\phi_\pi + \overline{\phi}_\eta\phi_\eta)
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

しかるに Potential (A.1) は2項のみ

更に

S_3 invariance + Something

の仮定が必要

Potential (A.8) からは

$$v_1^2+v_2^2+v_3^2=\frac{K}{3}(v_1+v_2+v_3)^2$$

$$K=1+\frac{\lambda_2-\lambda_\sigma}{\lambda_2-\lambda_+}$$

(A.9)

(A.10)

付加的仮定

$$(\overline{\phi}_\sigma\phi_\sigma)\ \leftrightarrow\ (\overline{\phi}_\pi\phi_\pi+\overline{\phi}_\eta\phi_\eta)$$

(A.11)

A.2 Observed v_i spectrum

We define z_i-parameters as follows:

$$v_i = v z_i \quad \textbf{with} \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1 \qquad \textbf{(A.12)}$$

$$z_1 = \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{6}}$$

$$z_2 = \frac{2+\sqrt{1-\varepsilon}-\sqrt{3}\sqrt{1+\varepsilon}}{2\sqrt{6}}$$

$$z_3 = \frac{2+\sqrt{1-\varepsilon}+\sqrt{3}\sqrt{1+\varepsilon}}{2\sqrt{6}}$$

$$\varepsilon \to 0$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

(A.13)

$$\varepsilon = 0.079072 \qquad \textbf{(A.14)}$$

すべての独立なS_3対称性の項を考慮しても出せない

S_3対称性の破れの導入が必要

A.3 A broken S_3 symmetry

- 関係式(3.6)を保ったまま S_3 Symmetryを破りたい

$$V_{SB} = \lambda_{SB}\left[\xi_\pi(\overline{\phi}_\pi\phi_\pi) - \xi_\eta(\overline{\phi}_\eta\phi_\eta)\right]^2 \tag{A.15}$$

このとき

$$|v_\sigma|^2 = |v_\pi|^2 + |v_\eta|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda_1 + \lambda_2} \tag{A.16}$$

$$\frac{v_\pi^2}{v_\eta^2} = \frac{\xi_\eta}{\xi_\pi} \tag{A.17}$$

Another Model

- **The S_3 symmetric potential (A.1) is softly broken by a term** ← **by Kubo**

$$V_{SB} = \mu_{SB}^2(\bar{\phi}'_\pi \phi'_\pi)$$

$$= \mu_{SB}^2(c\bar{\phi}_\pi - s\bar{\phi}_\eta)(c\phi_\pi - s\phi_\eta)$$

(A.18)

$$\begin{pmatrix} \phi'_\pi \\ \phi'_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_\pi \\ \phi_\eta \end{pmatrix}$$

(A.19)

θ は by hand で与える S_3 breaking parameter

- We regard the Higgs potential $V=V_0+V_{SB}$ as the function of the fields $(\phi_\pi, \phi_\eta, \phi_\sigma)$, not of $(\phi'_\pi, \phi'_\eta, \phi_\sigma)$. Then we obtain the relation (A.6) and a constraint on the parameter θ

$$\tan\theta = \frac{v_\pi}{v_\eta} = \frac{\sqrt{3}(v_2 - v_1)}{2v_3 - v_2 - v_1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{m_\mu} - \sqrt{m_e})}{2\sqrt{m_\tau} - \sqrt{m_\mu} - \sqrt{m_e}} \qquad \text{(A.20)}$$

which gives a numerical result

$$\theta = 12.7324^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = 0.220398. \qquad \text{(A.21)}$$

c.f. The Cabibbo mixing

$$|V_{us}| = 0.2200 \pm 0.0026 \qquad \text{(A.22)}$$

At present, this coincidence is only accidental.

See Y.K., PRL 47, 1241 (1981)

$$\tan\theta_c = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{m_\mu} - \sqrt{m_e})}{2\sqrt{m_\tau} - \sqrt{m_\mu} - \sqrt{m_e}}$$

(A.23)